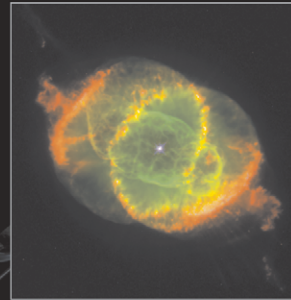


ESA/ESO ÖVNINGSSERIE I ASTRONOMI

Övningar i astronomi
som använder observationer från
NASA/ESA Hubble Space Telescope
och ESOs teleskop



Övning **3**

Mätning av avståndet till Kattögennebulosan
Baserat på observationer med NASA/ESA Hubble Space Telescope



Innehåll

ESA/ESOs Övningsserie i Astronomi 3

Förord

- Förord sidan 2

Introduktion

- Sena faser i lågmassiva stjärnors liv sidan 3
- Avståndet till Planetariska Nebulosor sidan 4
- Kattögenebulosan sidan 5

Uppgifter

- Uppgift 1 sidan 7
- Uppgift 2 sidan 7
- Uppgift 3 sidan 7
- Förstoringsmetoden sidan 8
- Uppgift 4 sidan 10
- Uppgift 5 sidan 10
- Uppgift 6 sidan 10
- Uppgift 7 sidan 10
- Uppgift 8 sidan 10
- Radialpassningsmetoden sidan 11
- Uppgift 9 sidan 13
- Uppgift 10 sidan 13
- Uppgift 11 sidan 13

Ytterligare Läsning

- Vetenskapliga artiklar sidan 14

Lärarens Guide

- Lärarens Guide sidan 16

Förord

ESA/ESOs Övningsserie i Astronomi 3

Mätning av avståndet till Kattögennebulosan

Astronomi är en lättillgänglig och visuell vetenskap, vilket gör den idealisk i undervisningssyfte. De senaste åren har NASA¹, ESA², Hubble Space Telescope och ESOs³ teleskop på La Silla- och Paranal-observatorierna i Chile presenterat allt djupare och mer spektakulära bilder av universum. Hubble och ESOs teleskop har inte bara gett fantastiska bilder, de är även ovärderliga instrument för astronomer. Teleskopen har en mycket bra rums/vinkel-upplösning (bildskärpa), vilket ger astronomer möjlighet att blicka längre ut i universum än någonsin tidigare och låter dem svara på gamla, hittills obesvarade frågor. Att analysera sådana observationer, vilket ofta är ett sofistikerat och detaljerat arbete, är ibland tillräckligt enkelt för att gymnasiestudenter själva ska kunna utföra det.

Denna serie av uppgifter är framtagen av den europeiska partnern i Hubbleprojektet, ESA (European Space Agency), som har 15% av observationstiden med Hubble, tillsammans med ESO (the European Southern Observatory).



Figur 1: NASA/ESAs Hubble Space Telescope
NASA/ESAs Hubble Space Telescope har presenterat spektakulära vyer av universum från sin bana runt jorden.



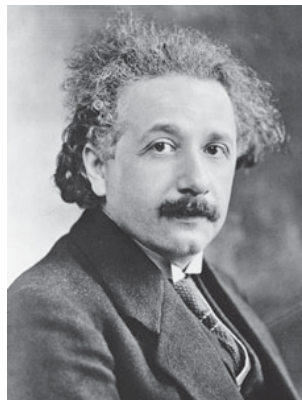
Introduktion

Sena faser i lätta stjärnors liv

Kattögenebulosan (NGC 6543) är en så kallad planetarisk nebulosa. Trots sitt namn har planetariska nebulosor ingenting att göra med planeter. Termen introducerades under 1800-talet då dessa objekt mer såg ut som planeter genom dåtidens små teleskop. Planetariska nebulosor skapas under lätta stjärnors, som till exempel solens, dödsryckningar när stjärnan sakta kastar ut sina yttre lager.

Ljuset som strålas ut från de flesta stjärnor är en biprodukt av den termonukleära fusionsprocessen, känd som väteförbränning, där fyra vätekärnor bildar en heliumkärna. En sådan fusion kan endast ske i kärnan av en stjärna där gigantiska gravitationella krafter trycker upp temperaturen till runt 10^7 K. I dessa höga temperaturer finns där tillräckligt med energi för att överkomma de elektrostatiska repulsiva krafterna, som agerar mellan protoner vilka har samma laddning, så att fyra kärnor (protoner) kan sammansmälta och skapa en ny kärna, helium (se fig. 2) och därmed frigöra ännu mer energi.

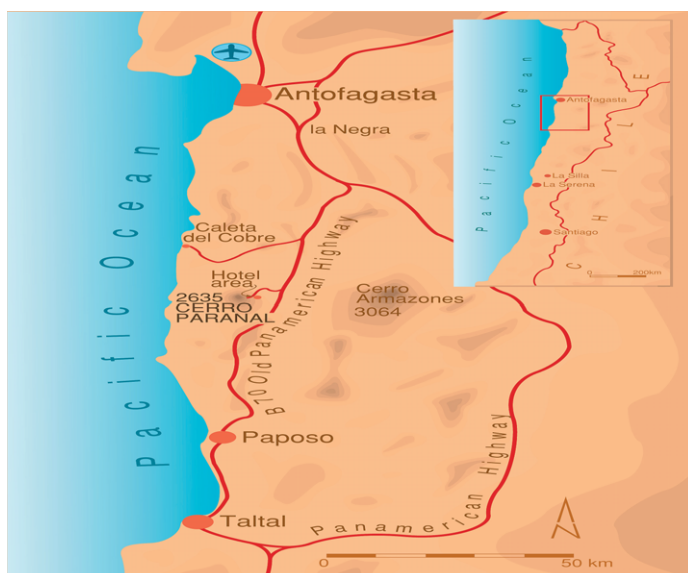
Massan av en heliumkärna är endast 99,3% av massan hos de fyra ursprungliga vätekärnorna. Fusionsprocessen konverterar de kvarvarande



Figur 3: Albert Einstein
Einsteins berömda ekvation $E = Mc^2$ visar relationen mellan massa and energi.

0,7% till en viss mängd energi - mestadels ljus - som kan beräknas ur Einsteins berömda ekvation, $E = Mc^2$. Eftersom c^2 är ett stort nummer betyder det att även en liten mängd materia kan konverteras till en fantastisk mängd energi. Resten av massan på 0,7% involverad i en fusionsreaktion kan verka liten, men när man betraktar den totala mängden reaktioner är massan (och därför energin) som är involverad rejäl.

Den utstrålade energin balancerar kraften från gravitationen och stjärnan förblir lugn i ett stabilt jämviktsläge i mer än 90% av sitt liv (solen kommer att stanna i sitt nuvarande stabila tillstånd i ytterligare 5 miljarder år).



Figur 2: Väteförbränning

Den enklaste mekanismen för "tillverkning" av energi startar i fusionen av fyra vätekärnor till en heliumkärna. Processen har flera steg men här visas det samlade resultatet.

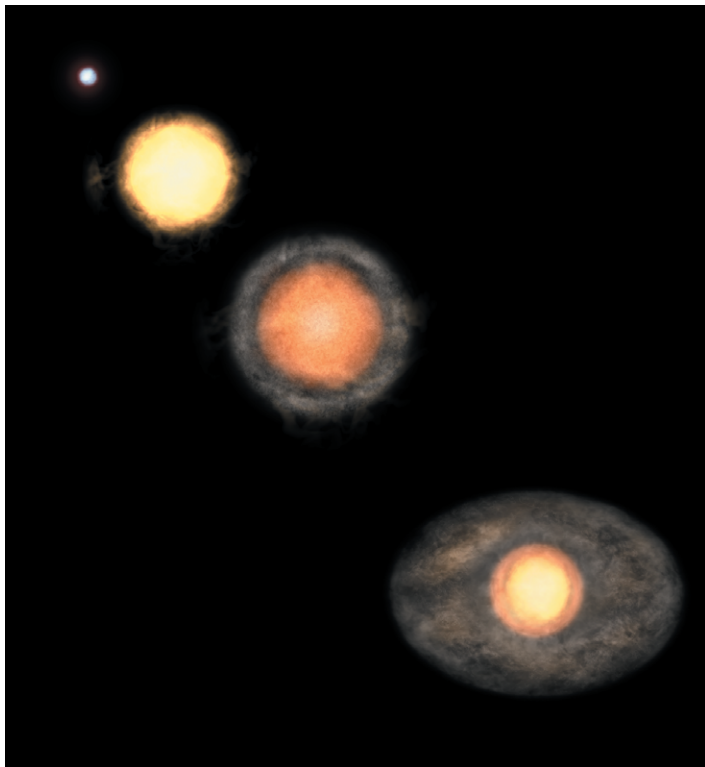
När väteförrådet i kärnan tar slut och väteförbränningen inte längre är möjlig komprimerar de gravitationella krafterna stjärnans kärna. Temperaturen i kärnan ökar då till 100 miljoner K och heliumkärnorna i kärnan börjar sammansmälta för att bilda tyngre ämnen som kol - detta är processen heliumförbränning.

Vid denna tiden sväller de yttre lagren av stjärnan - för en stjärna med solens storlek skulle skalet i denna fasen nå ända ut till jordens nuvarande bana.

Material från djupt inom den lätta stjärnan förs gång på gång upp till ytan under denna sena del av dess liv och berikar de yttre lagren med andra ämnen än väte under en process som kallas "dredge-up" (ungefär muddra upp). Lagren skickas slutligen ut i rymden, ibland som ett sfäriskt skal, men oftast i en asymmetrisk form, och bildar en kokong runt



Introduktion



Figur 4: Sena faser i en lågmassiv stjärnas liv

När en stjärna når sin sista fas i livet börjar den förbränna tyngre och tyngre grundämnen. Vid denna tid börjar stjärnan kasta ut stoft och gas och därigenom bilda en planetarisk nebulosa.

den döende stjärnan (se fig. 4).

Det ultraviolette ljuset från den centrala kärnan av den döende stjärnan lyser upp det utsända materialet och framhäver strukturen i de spektakulära planetariska nebulosorna vi ser i våra teleskop. Planetariska nebulosor är väldigt kortlivade med astronomiska mått mätt. Åldern av flera välkända planetariska nebulosor — varav en är Kattögenebulosan (NGC 6543) — är endast runt tusen år och de blir generellt inte mer än femtio tusen år. Efter detta tonar de bort och in i de interstellära mediet och berikar detta med tyngre grundämnen som blir tillgängligt för nästa generations stjärnor.

Solen är en vanlig lågmassiv stjärna och den kommer troligvis att sluta sitt liv som en spektakulär planetarisk nebulosa. Jorden kommer inte att kunna uppehålla något liv när detta händer, men vi har ungefär 5000 miljoner år på oss innan detta blir vårt allvarligaste miljöproblem.

Avstånd till Planetariska Nebulosor

I denna uppgift ska vi mäta avståndet till Kattögenebulosan. Studierna av fysiska egenskaper som storleken, massan, ljusstyrkan och åldern av planetariska nebulosor är omöjliga utan korrekta avståndsmätningar till nebulosan. Faktiskt är astronomi i allmänhet beroende av avståndsmätningar.

Det är inte lätt att mäta avståndet till planetariska nebulosor. Även om de formas från så kallade lågmassiva stjärnor kan begynnelsemassan variera så mycket som med en faktor 10, vilket ger de individuella planetariska nebulosorna väldigt olika egenskaper. Eftersom alla planetariska nebulosor inte har samma storlek eller ljusstyrka är det inte möjligt att använda sådana generaliseringar för att uppskatta deras avstånd. Emellanåt kan dock observationer göras som tillåter en direkt bestämning av avståndet till en planetarisk nebulosa. Så är fallet med Kattögenebulosan.



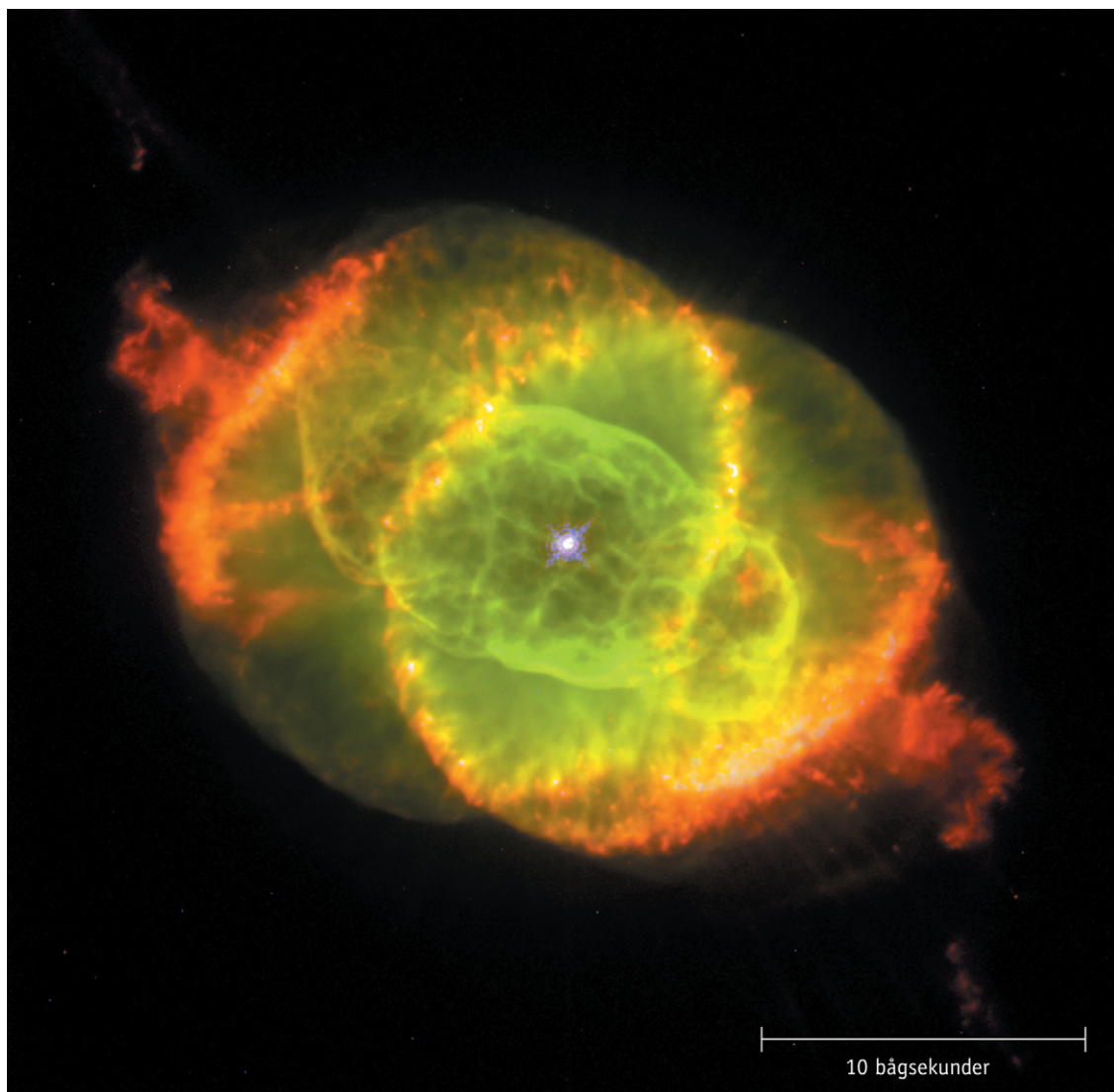
Introduktion

Kattögenebulosan

Kattögenebulosan ligger i stjärnbilden Draco och är en av de mest komplexa planetariska nebulosor som någonsin setts. Bilder från Hubble avslöjar förvånansvärt komplexa strukturer som till exempel koncentrisk skal av gas, höghastighetsjets av gas och ovanliga knutar av gas. Man tror att centralstjärnan faktiskt är en dubbelstjärna eftersom de dynamiska effekterna av två stjärnor som går i bana runt varandra enklast förklarar nebulosans ovanligt komplexa

struktur.

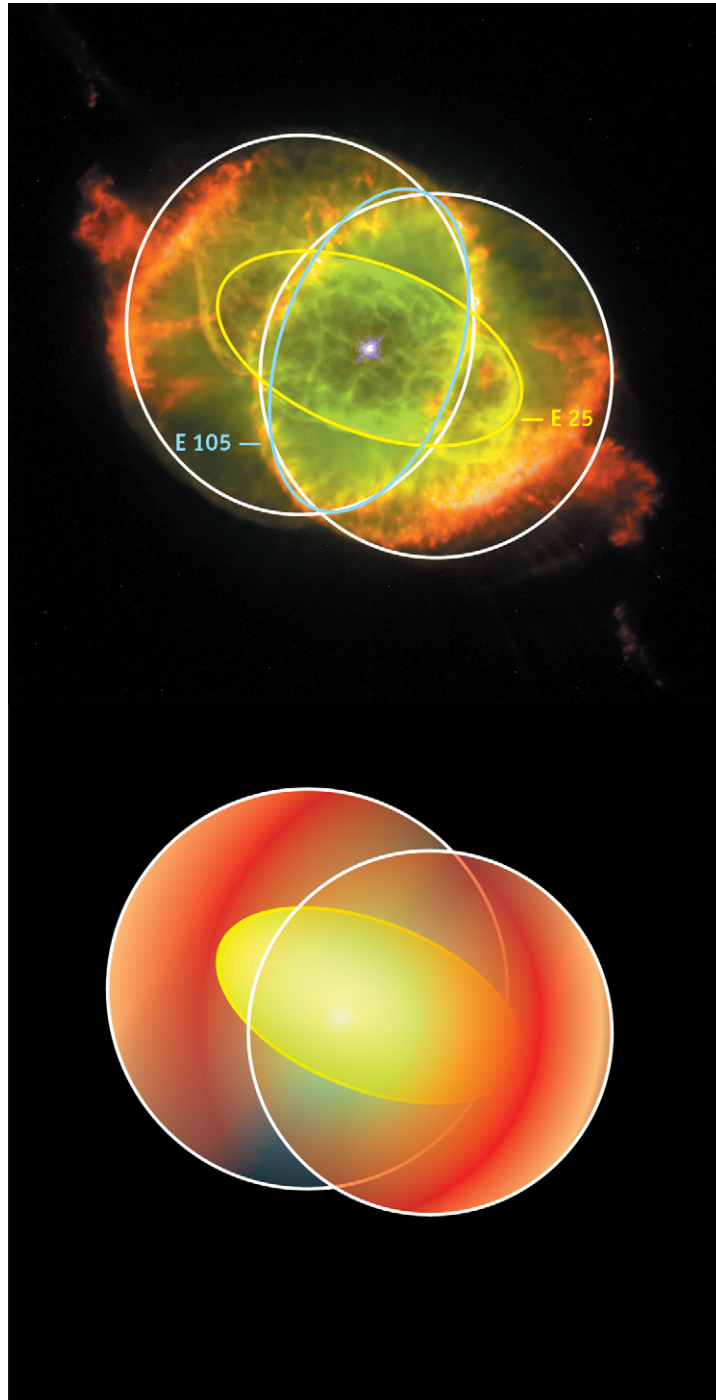
Analyser av olika delar av nebulosan, som visas i fig. 6, har gjorts flera gånger tidigare. Det är känt att flera av de mest framträdande särdragen har en annan ålder än den centrala delen av nebulosan. Mätningarna som vi ska göra i denna övning kommer inte att fokusera på dessa särdrag utan på lillaxeln på ellipsoiden som kallas E25.



Figur 5: Kattögenebulosan. Denna färgbild av Kattögenebulosan, NGC 6543, tagen med Hubbles Wide Field and Planetary Camera 2 är en sammansättning av tre bilder tagna med olika våglängd. Joniserat kväve (658,4 nm) visas som rött, dubbelt joniserat syre (500,7 nm) visas som grönt och neutralt syre (630,0 nm) visas som blått. Bildens skala är indikerad. Delen som kallas E25 är ellipsoiden närmast centralstjärnan.



Introduktion



Figur 6: Geometrisk 3D-modell av Kattögennebulosan

Den allmänna bipolära strukturen hos nebulosan är illustrerad här. Den inre ellipsoiden, som kallas E25, är markerad med gult. Anpassad från Reed et al. (1999).



Uppgifter

I de följande två uppgifterna är t den förflutna tiden mellan två observationer.

Uppgift 1

- Finn en relation mellan vinkelförflyttningen, α , tiden, t , och vinkelhastigheten av förflyttningen, ω

Vinkelhastigheten mäts i enheter av vinkel per tidsenhet. Det är viktigt att denna vinkel mäts i radianer.

Uppgift 2

- Finn en relation mellan den linjära förflyttningen, l , tiden, t , och hastigheten i den linjära förflyttningens riktning, v_t . Denna hastighet kallas tangentialhastighet.

Tangentialhastigheten mäts i km/s.

Uppgift 3

Med hjälp av approximationen för små vinklar, som finns i Matematiska Verktyg, finner vi relationen mellan avståndet, D , den linjära förflyttningen, l , och vinkelförflyttningen, α .

$$D = l/\alpha$$

- Använd denna ekvation för att finna relationen mellan avståndet, D , tangentialhastigheten, v_t , och vinkelhastigheten ω

Kattögenebulosan avbildades två gånger av Hubble, först den 18:e september 1994 och sen igen den 17:e augusti 1997. Om de två bilderna visas på en dator omväxlande i snabb takt (en teknik som kallas "blinkning") är det möjligt att se att Kattögenebulosan har expanderat under intervallet mellan de två bilderna. Denna vinkel-expansion är inte tillräckligt stor för att man ska kunna se den endast genom att titta på två papperskopior av bilderna men det är fortfarande möjligt att bestämma expansionen i enheter av vinkel per tidsenhet — vilket du kommer se själv om en stund.

Användningen av denna effekt, känd som expansionsparallax, är inte så ovanlig i astronomi. Den är oftare använd på bilder tagna med radioteleskop men här gör Hubbles höga upplösning det möjligt att bestämma expansionsparallaxen

av olika särdrag i denna relativt avlägsna nebulosa inom synliga våglängder. Detta gör en detaljerad beskrivning av nebulosan möjlig.

Att mäta expansionsparallaxen längs lillaxeln på E25 motsvarar en bestämning av vinkelhastigheten, ω vinkelrät mot synriktningen. Lite mer information behövs för att beräkna avståndet till nebulosan: den tangentiella hastigheten längs lillaxeln på E25. Turligt nog har denna hastighet erhållits av en grupp astronomer (Miranda & Solf, 1992), vilka kombinerade spektroskopiska metoder¹ med en kinetisk modell av nebulosans expansion. Gruppens slutsats var att den tangentiella hastigheten längs E25s lillaxel är 16,4 km/s, vilket motsvarar ungefär 60000 km/h.

När den tangentiella hastigheten är given behöver vi bara bestämma vinkelhastigheten. Du kommer använda två olika metoder, förstöringsmetoden och radialpassningsmetoden, för att göra detta.

¹Spektroskopiska mätningar delar in ljus i dess olika färger (till exempel med ett prisma). Ljuset kan sedan bli undersökt för att finna olika dopplerskift skapade av källans rörelse och den motsvarande radialhastigheten (mot eller bort från oss) kan härledas. I detta fall har kunskapen om radialhastigheten kombinerats med en modell av den övergripande expansionsrörelsen (åt alla håll) för att härleda den tangentiella hastigheten.



Uppgifter

Förstoringsmetoden

Storleken av expansionen på Hubbles bilder är mindre än en pixel (bildelement) så dessa mätningar kräver en ganska sofistikerad teknik. Förstoringsmetoden tar bilden från 1994 och förstorar den tills den precis passar med bilden från 1997. Fig. 7 visar subtraktionsmetoden. Notera att bilden från 1994 inte är förstorad. I varje bild av de nio i fig. 8 har bilden från 1994 förstorats med olika faktorer, F , (detta är siffran i övre högra hörnet på de nio små bilderna) och bilden från 1997 subtraheras från den förstorade bilden från 1994.

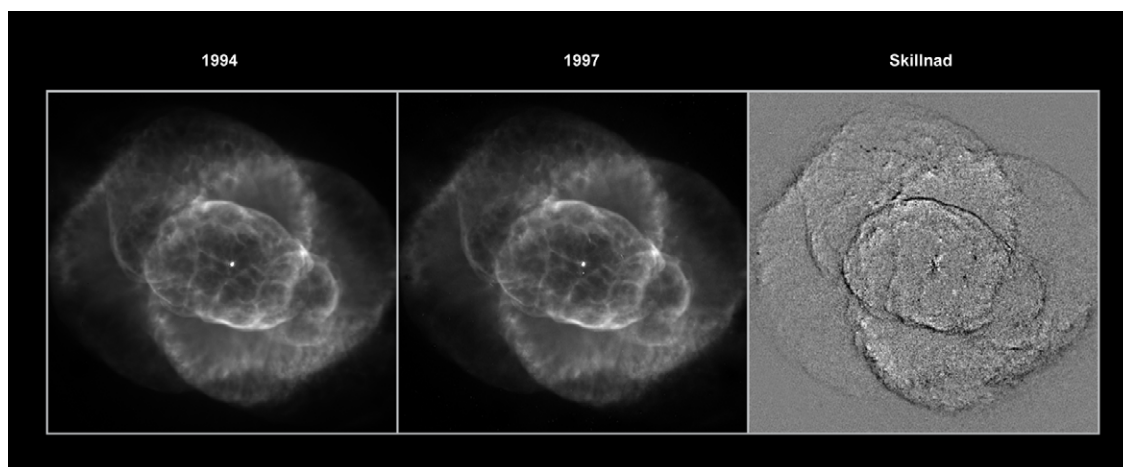
Ju mer lika bilderna är, desto mindre struktur kommer att dyka upp i den resulterande bilden. Vi ska leta efter den jämnaste bilden och förstoringsfaktorn i hörnet på bilden är den som beskriver expansionen av Kattögennebulosan från 1994 till 1997. Notera att eftersom expansionsparallaxen inte är densamma för alla delar ska vi leta efter den bild där "vår" del — E25s lillaxel — försvinner.

När förstoringsfaktorn är bestämd kan ω beräknas från detta uttryck

$$\omega = \frac{(F - 1)d}{t}$$

där t är den förflutna tiden mellan de två bilderna och d är avståndet i radianer från centralstjärnan i nebulosan till delen vi vill mäta på (i detta fallet E25s lillaxel). ω är mätt i radianer per tidsenhet.

Följande uppgifter tar dig igenom beräkningar av de olika parametrarna i detta uttryck. Efteråt kommer du kunna beräkna ω och sedan avståndet till Kattögennebulosan.

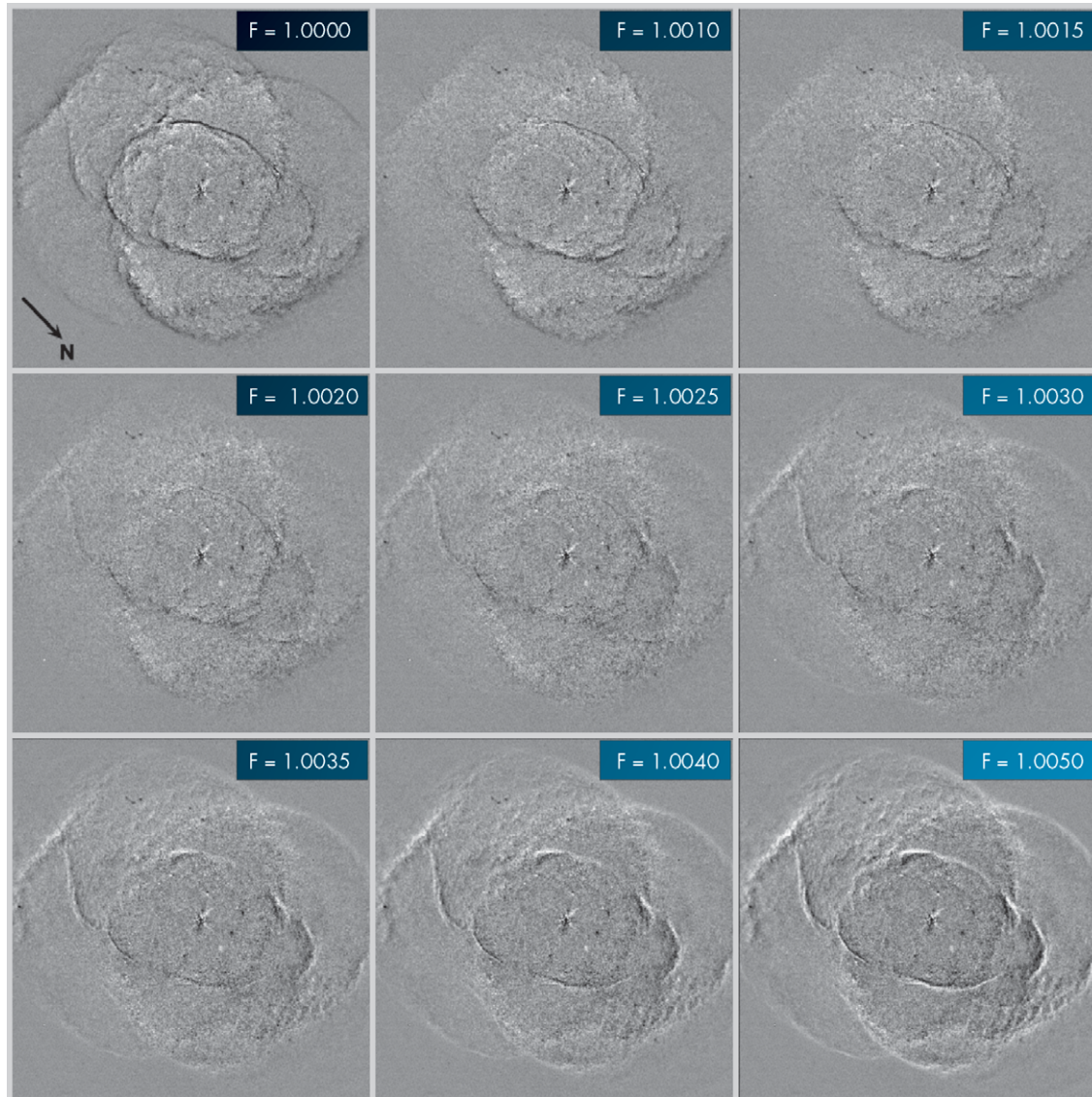


Figur 7: För att belysa expansionen behövs en speciell bildbehandling

Den första bilden (fig. 7a) togs 1994, den andra (fig. 7b) togs 1997. Endast en örnögd observatör skulle kunna se någon skillnad mellan de två bilderna utan en dator. Bildbehandlingen subtraherar en bild från den andra. Den sista bilden kallas den resulterande bilden (fig. 7c).



Uppgifter



Figur 8: De nio resulterande bilderna

Dessa bilder är resultatet av förstoringar av bilden från 1994 och sen en subtraktion av bilden från 1997. Förstoringsfaktorn, F , är indikerad i varje bild (från Reed et al., 1999).



Uppgifter

Uppgift 4

- ? Bestäm i vilken av de nio bilderna i fig. 8 som E25s lillaxel försvinner. Du kan bestämma att två bilder är lika bra och ta ett medelvärde på förstoringfaktorerna.

Uppgift 5

- ? Beräkna tiden mellan datumen som de två bilderna togs och konvertera tiden till sekunder. Varför spelar det ingen roll att du inte vet den exakta tiden på dagen som bilderna togs?

Uppgift 6

- ? Hitta E25s lillaxel i fig. 5. Mät avståndet, d , från centralstjärnan i nebulosan till E25s lillaxel i enheter av millibågsekunder. Gör om detta avstånd till radianer med hjälp av konverteringsfaktorn som ges i "Matematiska Verktyg".

Uppgift 7

- ? Nu har du allt du behöver för att beräkna expansionsparallaxen, α med hjälp av förstöringsmetoden.

Uppgift 8

Som tidigare nämnts har tangentialhastigheten, v_t , hos E25s lillaxel redan uppmätts av en grupp astronomer till 16,4 km/s.

- ? Beräkna avståndet till Kattögennebulosan.

Innan du kan jämföra dina resultat med de från Reed et al. ska du beräkna avståndet med hjälp av radialpassningsmetoden.



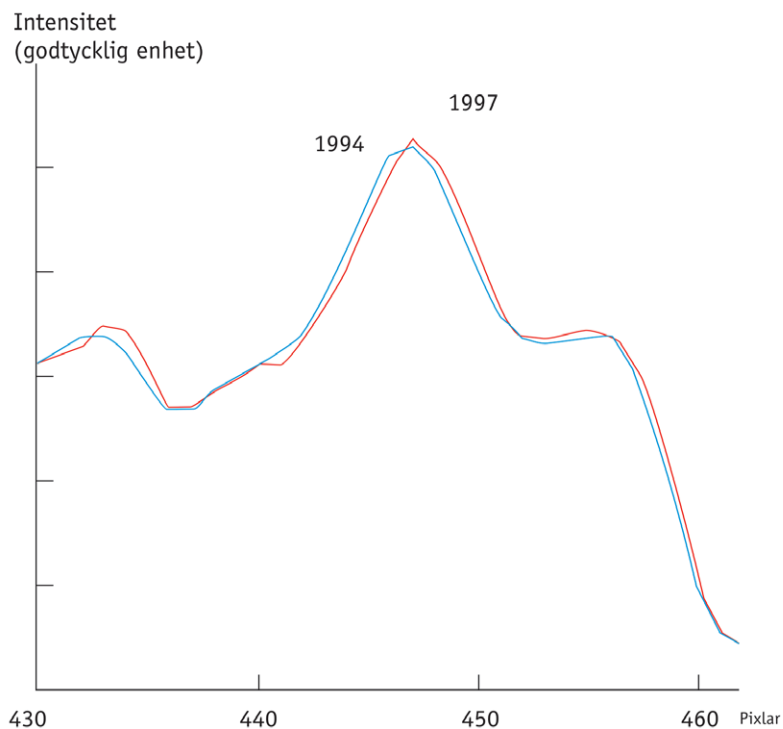
Uppgifter

Radialpassningsmetoden

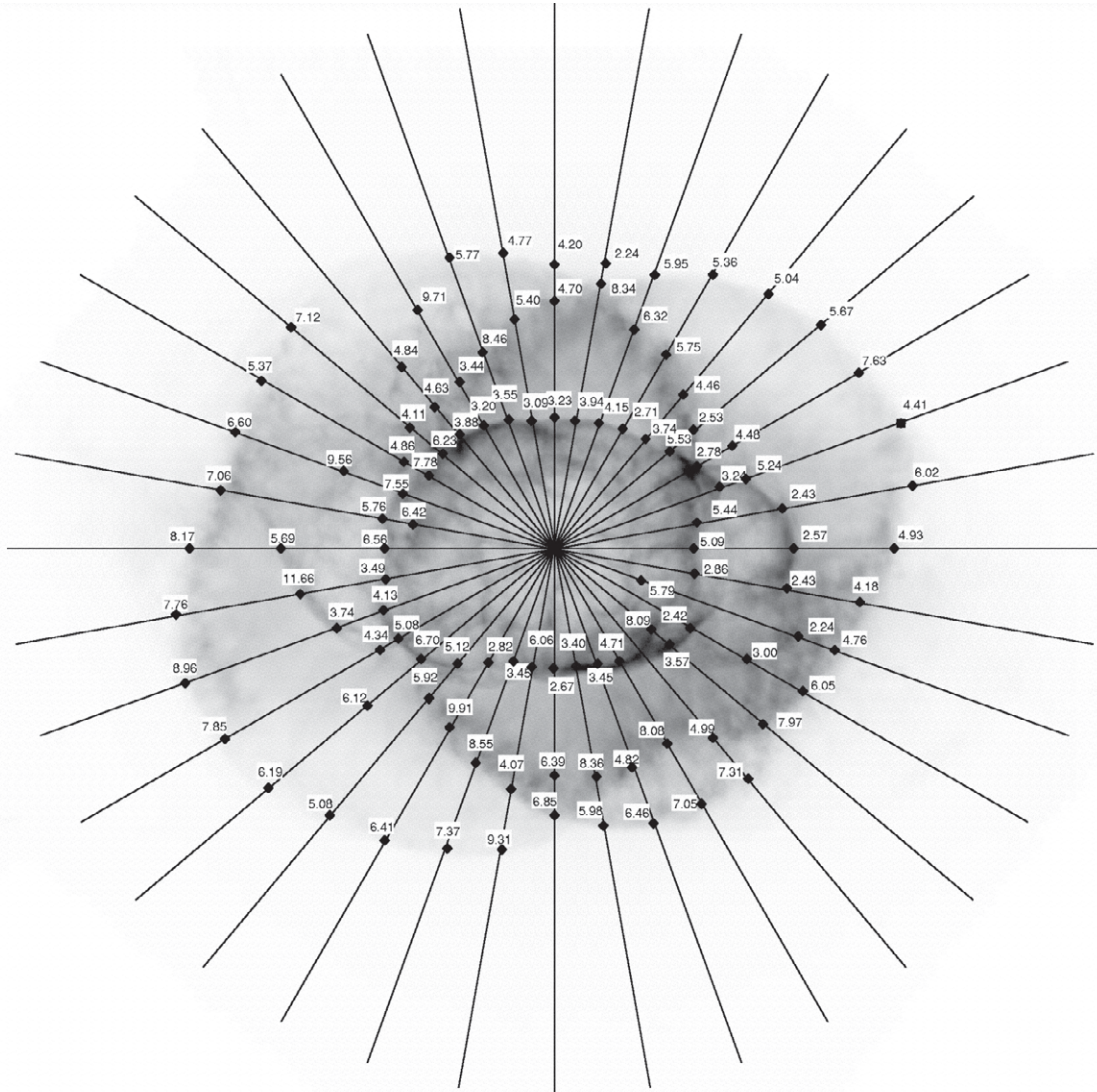
Om vi mäter pixelvärdet på de pixlar som ligger på en linje genom centralstjärnan i fig. 5 får vi en kurva som i fig. 9. Topparna och dalarna motsvarar ljusa och mörka områden längs linjen och visar intensiteten på ljuset som kommer från olika ryggar och knutar i nebulosan.

Skillnaden mellan kurvorna gjorda från de två bilderna från 1994 och 1997 kan användas till att mäta nebulosans expansion. Oturligt nog är skillnaden mellan särdragen i de två bilderna så liten (mindre än en pixel) att vi

inte enkelt kan repetera denna mätning här. Du måste lita på de olika mätningarna av ω från vetenskapsmännen och använda detta för att bestämma avståndet till Kattögenebulosan igen. Vetenskapsmännen mätte ω på flera olika platser i E25 (och också på flera andra punkter i nebulosan). Dessa mätningar är indikerade i fig. 10. Mätningarna är gjorda i millibågsekunder/år och de måste konverteras till rätt enheter.



Figur 9: Intensitetsprofiler
Två exempel på hur intensitetsmätningar längs en linje genom nebulosan ser ut på bilderna från 1994 respektive 1997. Linjen vi använt här är den vid klockan 12 i fig. 10.



Figur 10: ω och Radiala Intensitetsprofiler

De resulterande ω från försiktigt passade radiala profiler längs linjerna visade i figuren. ω är mätt i millibågsekunder/år (från Reed et al., 1999).



Uppgifter

Uppgift 9

- ? Identifiera E25s lillaxel i fig. 10. Avläs ω vid rätt "diamanter" — var noggrann så du matchar rätt siffra till rätt "diamant"! Ta ett medel på de ω som du hittar i figuren och beräkna avståndet till Kattögenebulosan som innan.

Uppgift 10

Den kinematiska åldern (den tid som passerat sedan expansionen av nebulosan startade), T , av den inre kärnan av nebulosan kan härledas från de tidigare beräknade värdena (om man antar att expansionshastigheten är konstant):

$$T = d/\omega$$

Värdet på d fick du i uppgift 6.

- ? Beräkna den kinematiska åldern, T , för båda värdena av ω som du fått fram.

Uppgift 11

Resultatet från Reed et al. på avståndet till Kattögenebulosan är 1001 ± 296 parsec. Detta resultat togs fram inte bara med hjälp av E25 utan också a) genom att mäta andra strukturer med förstöringsmetoden, b) genom att använda alla olika "diamanterna" i radialpassningsmetoden och slutligen c) genom att använda en tredje metod som kallas profilmetoden.

- ? Jämför dina resultat med Reed et al's.
- ? Fundera över var du har kunnat påverka resultaten genom de val du gjort. Gör om beräkningarna med en aning varierade parametrar. Du kan till exempel använda en annan resulterande bild i förstöringsmetoden eller välja andra diamanter i radialpassningsmetoden. Gör små ändringar i parametrarna och du kommer troligen att se stora skillnader i resultaten.

Denna övning visar både svårigheten i att få noggranna mätningar på avstånd och styrkan i de astronomiska verktygen.



Ytterligare läsning

Vetenskapliga artiklar

- Reed, Darren S., Balick, B., Hajian, Arsen R., Klayton, Tracy L., Giovanardi, S., Casertano, S., Panagia, N., Terzian, Y. 1999, AJ, 118, 2430–2441: *Hubble Space Telescope Measurements of the Expansion of NGC 6543: Parallax Distance and Nebular Evolution*
- Miranda, L.F., Solf, J. 1992, A&A, 260, 397–410: *Long-slit spectroscopy of the planetary nebula NGC 6543 - Collimated bipolar ejections from a precessing central source?*

Se också länkar på:

<http://www.astroex.org/>





Kolofon



EUROPEAN SOUTHERN OBSERVATORY
Education and Public Relations Service

ESA/ESOs övningsserie i astronomi
Övning 3: Mätning av avståndet till
Kattögennebulosan
2^a upplagan (23.05.2002)

Producerad av:

Hubble European Space Agency Information Centre
och European Southern Observatory:
<http://www.astroex.org>
(Pdf-versioner av detta material och relaterade
internetlänkar finns på denna adress)

Postadress:

European Southern Observatory
Karl-Schwarzschild-Str. 2
D-85748 Garching bei München
Tyskland

Telefon: +49 89 3200 6306 (eller 3200 60)
Fax: +49 89 3200 64 80 (eller 320 32 62)
E-mail: info@astroex.org

Text av:

Anne Værnholt Olesen, Lars Lindberg Christensen,
Jean-Marc Brauer, och Arntraud Bacher

Grafik och layout:

Martin Kornmesser

Översättning:

Martin Lundqvist

Svensk Korrekturläsning:

Britt Sjöberg

Koordination:

Lars Lindberg Christensen och Richard West

Varma tack till Darren Reed och Arsen Hajian för
tillförsel av data, och till Nina Troelsgaard Jensen,
Frederiksberg Seminarium, för kommentarer.



Lärarens Guide

Kort Summering

Vi mäter Kattögennebulosans expansions vinkelhastighet genom en omsorgsfull undersökning av två bilder från Hubble tagna 1994 och 1997. Med hjälp av mätningar av den tangentiella hastigheten från en tidig vetenskaplig artikel är det möjligt att bestämma avståndet till nebulosan. Vi härleder också avståndet genom att se hur mycket radiala intensitetsprofiler av framträdande drag i de två bilderna ändras från 1994 till 1997.

I denna övning gör studenterna färre mätningar än i övning 1 och 2 men blir introducerade till två olika metoder — en "traditionell" och en "mindre traditionell" — för beräkningar av avstånd till astro-nomiska objekt.

I den ursprungliga artikeln använder astronomerna tre olika metoder men den tredje kräver mycket avancerade datorprogram och det är inte möjligt att här upprepa denna beräkning/mätning.

Uppgift 1 och 2

Genom att använda ekvationen "avstånd = hastighet $\times$ tid" finner vi:

$$a = \omega \cdot t$$

$$l = v_t \cdot t$$

Uppgift 3

Genom att använda figur 6 i Matematiska Verktyg med $b = l$ och $c = D$ får vi:

$$D = l / a = v_t / \omega$$

Uttrycket för α

d är vinkelavståndet till delen i bilden från 1994. F är förstoringsfaktorn. $F \cdot d$ är vinkelavståndet till delen i bilden från 1997 så $(F-1)d$ är skillnaden i vinkel mellan bilden från 1994 och bilden från 1997. Dividera med den förflutna tiden för att få vinkelhastigheten.

Uppgift 4

Den bästa förstoringsfaktorn är **1,00275** som är medeltalet av 1,0025 och 1,0030.

$F = 1,00275$ ger det resultat som är närmast det i den vetenskapliga artikeln.

Uppgift 5

Tiden som förflutit mellan den 18:e september 1994 till den 17:e augusti 1997 (datumen finns på sidan 7) kan enkelt beräknas. Notera att 1996 är ett skottår.

$$t = 3 \text{ år} + 1 \text{ dag} - 32 \text{ dagar} = 1064 \text{ dagar} = \mathbf{9,19296 \cdot 10^7 \text{ s}}$$

Med fyra signifikanta siffror gör en dag mer eller mindre ingen urskiljbar skillnad.

Uppgift 6

Från en utskriven bild med storleken 149 x 146 mm fås:

44 mm motsvarar 10 bågsekunder så 1 bågsekund är **4,4 mm**

En direkt mätning av avståndet från centralstjärnan till E25s lillaxel ger:

17,5 mm motsvarar $d = 3,98$ bågsekunder = **$1,9282 \cdot 10^{-5}$ radianer** (genom att använda konverteringsfaktorn given i rutan i Matematiska Verktyg).



Lärarens Guide

Uppgift 7

Beräkning av ω med hjälp av förstoringsmetoden:

$$\omega = (F-1) \times d/t = (1,00275-1) \times 1,9282 \times 10^{-5} / (9,19296 \times 10^7) = 5,768 \times 10^{-16} \text{ radianer/s}$$

Uppgift 8

Alltså blir avståndet:

$$D = v_t/\omega = 16,4 / (5,768 \times 10^{-16}) = 2,8443 \times 10^{16} \text{ km} = 922 \text{ pc}$$

Uppgift 9

Beräkning av ω och avståndet D till Kattögennebulosan med hjälp av radialpassningsmetoden. Tyvärr så finns det en viss frihet i valet av punkter här - och därför möjligheter att skjuta resultatet i önskad riktning.

Ett medel över 12 mätpunkter (i toppen och botten av ellipsoiden) ger:

topp	3,55	3,09	3,23	3,94	4,15	2,71
botten	2,82	3,45	6,06	2,67	3,40	3,45
ω_genomsnitt (mas/år)	3,54					
ω_genomsnitt (rad/s))	$5,45 \times 10^{-16}$					
D (km)	$3,01 \times 10^{16}$					
D (parsec)	976					

$$\omega = 3,54 \text{ mas/år} = 3,54 \times 10^{-3} \times 4,8481 \times 10^{-6} / (365 \times 24 \times 3600) \text{ radianer/s} = 5,45 \times 10^{-16} \text{ radianer/s}$$

Uppgift 10

$$T = d/\omega = (1,9282 \times 10^{-5}) / (5,7628 \times 10^{-16}) = 3,3429 \times 10^{10} \text{ s} = 1060 \text{ år}$$

Med värdet på ω från radialpassningmetoden:

$$T = 3,539 \times 10^{10} \text{ s} = 1123 \text{ år}$$

Uppgift 11

Reed et al's resultat är $D = 1001 \pm 269 \text{ pc}$, $T = 1039 \pm 259 \text{ år}$.

Notera att båda metoderna lämnar ganska mycket utrymme för omedvetna justeringar. Det kan vara en bra idé att låta studenterna utföra en mer formell max/min-analys. Även om det är många beslut som ska tas under mätningarna och beräkningarna är det fortfarande inte möjligt att få helt orimliga resultat.

www.astroex.org

